

TƯƠNG QUAN CHIỀU SÂU VÀ CHIỀU DÀI NƯỚC NHẢY HOÀN CHỈNH TRONG LÒNG DẪN PHI LĂNG TRỤ MỞ RỘNG DẦN

The relationship between the depth and length of the hydraulic jump in the gradually expanding channel with rectangular cross section.

Lê Thị Việt Hà

Trường Đại học Giao thông Vận tải

Tóm tắt: Nước nhảy là hiện tượng dòng chảy biến đổi đột ngột từ độ sâu dòng chảy nhỏ hơn độ sâu phân giới sang độ sâu dòng chảy lớn hơn độ sâu phân giới hay từ trạng thái chảy xiết sang trạng thái chảy êm. Tùy theo năng lượng của dòng chảy trước nước nhảy và cấu tạo của lòng dẫn mà chiều sâu cũng như chiều dài của dòng chảy trong phạm vi nước nhảy hay tại mặt cắt cuối nước nhảy sẽ có những sự biến đổi khác nhau. Bài báo này trình bày kết quả kiểm chứng công thức giải tích về mối quan hệ giữa chiều sâu và chiều dài nước nhảy hoàn chỉnh trong lòng dẫn phi lăng trụ mở rộng dần, đáy bằng, mặt cắt ngang hình chữ nhật bằng số liệu thực nghiệm.

Abstract: Hydraulic jump is a rapidly varied flow that dissipates a significant amount of energy by changing the flow regime from supercritical to subcritical. Depending on the energy of the flow at vena contracta cross section and the structure of the channel, the depth and length of the flow in the range of jump roller or at the end of the aeration length will have different variations. This article presents the results of verifying the proposed formula on the relationship between the depth and length of the hydraulic jump in the gradually expanding horizontal rectangular channel with experimental data.

1. MỞ ĐẦU

Các nghiên cứu về nước nhảy hoàn chỉnh đã có từ cách đây gần 200 năm. Nghiên cứu đầu tiên được biết đến là Bélanger năm 1828 [1] khi đưa ra phương trình tính chiều sâu nước nhảy hoàn chỉnh trên lòng dẫn lăng trụ đáy bằng mặt cắt hình chữ nhật. Các tác giả tiếp theo nghiên cứu kế thừa và phát triển với nhiều dạng công thức khác, như B.A. Bakhmeteff và A.E. Matzke (1936)[2], O.F. Vaxiliép (1956)[3], G.H. Kosiakova (1961)[3], M.Đ. Trectousov (1963)[3], P.K. Tsveskov (1964)[3], I. Pikalov (1964)[3], Rajaratman (1965)[4], M.A. Mikhaliev (1971)[6], D. Dumitrescu và E. Rawzvan (Rumani) (1975)[7], H.T. An (1975)[8], N.V. Mạo (1977)[9]. Hiện nay hiện tượng nước nhảy vẫn còn nhận được quan tâm của rất nhiều các nhà khoa học. Các công thức mới được thiết lập từ lý thuyết, thực nghiệm, phương pháp số hoặc kết hợp nhiều phương pháp với nhau không ngừng được công bố trong thời gian gần đây như A.M. Gharangik, M.H. Chaudhry (1991)[10], S. Pagliara, M. Palermo

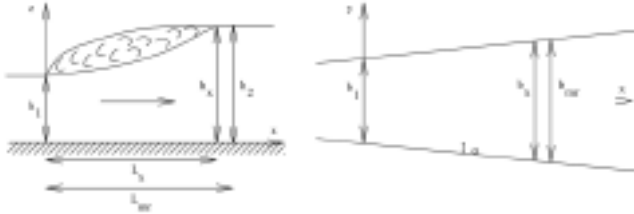
(2011)[11], N. Hassanpour, D.A. Hosseinzadeh, D. Farsadizadeh, C. Gualtieri (2017)[12], S. Nikmehr, Y. Aminpour (2020) [13]. Các nghiên cứu này chưa đề cập đến hiện tượng nước nhảy hoàn chỉnh trên lòng dẫn đáy bằng phi lăng trụ mặt cắt hình chữ nhật mở rộng dần bằng lý thuyết lớp biên và dòng tia rối, đặc biệt là chưa có công thức giải tích nào tính toán chiều dài khu nước nhảy. Bài báo này giới thiệu phương pháp xây dựng công thức giải tích tính độ sâu sau khu xoáy mặt, độ sâu liên hiệp của nước nhảy, chiều dài khu xoáy mặt và chiều dài nước nhảy nhờ lý thuyết dòng tia rối và lớp biên. Từ đó, tiến hành xây dựng tương quan giữa chiều sâu và chiều dài nước nhảy trong trường hợp được đề xuất.

2. CÔNG THỨC GIẢI TÍCH

Công thức xác định mối quan hệ giữa chiều sâu và chiều dài nước nhảy hoàn chỉnh trong lòng dẫn đáy bằng phi lăng trụ mở rộng dần mặt cắt hình chữ nhật được thiết lập bằng phương pháp giải tích từ lý thuyết lớp biên và dòng tia rối.

2.1. Sơ đồ bài toán

Sơ đồ bài toán nghiên cứu thể hiện trên Hình 1 với các ký hiệu: Chiều sâu và chiều rộng trước nước nhảy (h_1, b_1); Chiều sâu và chiều rộng cuối khu xoáy (h_x, b_x); Chiều sâu và chiều rộng cuối nước nhảy (h_2, b_{mr}); Chiều dài khu xoáy L_x ; chiều dài nước nhảy L_{mr} ; Góc mở rộng lòng dẫn 2α ; Trục tọa độ theo phương dọc, ngang và đứng lần lượt là x, y, z .



Hình 1. Sơ đồ bài toán

2.2. Điều kiện bài toán

Các giả thiết được chấp nhận để thiết lập công thức gồm:

- Coi nước nhảy là một dòng tia tự do ở nửa không gian trên có đáy không thấm nước, không gian hữu hạn mở rộng dần, phân bố lưu tốc theo Schlichting [8] với u_n, u_m là thành phần lưu tốc mặt và lưu tốc lớn nhất ở đáy:

$$\frac{u - u_n}{u_m - u_n} = \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^{3/2} \right]^2 = f \left(\frac{z}{h} \right) \quad (1)$$

- Lưu lượng không thay đổi theo thời gian:

$$Q = \text{const} \quad (2)$$

- Dòng chảy liên tục và không xét đến ảnh hưởng của hàm khí trong khu vực nước nhảy;

- Đáy lòng dẫn nhẵn lý tưởng, do đó có thể bỏ qua lực ma sát;

- Mặt cắt ngang dòng chảy hình chữ nhật:

$$S = Bh = bh; \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

- Áp suất phân bố theo quy luật thủy tĩnh:

$$p = \gamma h \quad (4)$$

- Bỏ qua chiều dày lớp biên sát thành;

- Các đại lượng trung bình theo phương ngang (Oy) có giá trị như nhau tại mọi điểm.

2.3. Các phương trình lý thuyết cơ bản

Từ các giả thiết trên, hệ phương trình cơ bản viết trong không gian bị giới hạn của dòng tia tự do có chiều rộng B , như sau:

- Tích phân Karman:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_S u^2 dS = \int_S F_x dS - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (5)$$

- Phương trình Reynolds mở rộng:

$$u \frac{\partial (bu)}{\partial x} - \left[\frac{1}{b} \int_0^h \frac{\partial (bu)}{\partial x} dz \right] \frac{\partial (bu)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (b\gamma h)}{\partial x} + 2x^2 b \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

trong đó: Q : lưu lượng dòng chảy; u, w : thành phần lưu tốc trung bình thời gian theo phương x và z ; x : chiều dài xáo trộn rối theo giả thuyết Prandtl[2]; B, b : bề rộng mặt thoáng và đáy của dòng chảy; P : áp lực thủy tĩnh.

2.4. Phương trình tính toán các đặc trưng hình học

2.4.1. Chiều sâu dòng chảy

Tích phân Karman khi dòng chảy ổn định trên kênh đáy bằng được biến đổi về dạng:

$$\int_S u^2 dS + \frac{P}{\rho} = C \quad (7)$$

Phân bố lưu tốc theo Schlichting, đặt $m = \frac{u_n}{u_m}$

được viết lại dưới dạng:

$$u = u_m \left[(1-m)f \left(\frac{z}{h} \right) + m \right] \quad (8)$$

Điều kiện biên của bài toán: Tại mặt cắt đầu nước nhảy ($x = 0; h = h_1$); Tại mặt cắt cuối khu xoáy mặt ($x = L_x; h = h_x$); Tại mặt cắt cuối nước nhảy ($x = L_{mr}; h = h_2$).

Thay (7) vào tích phân Karman (4), được phương trình xác định chiều sâu sau khu xoáy:

$$gh^2h^3 - bh(2u_1^2b_1h_1 + gb_1h_1^2) + 2u_1^2h_1^2b_1^2\alpha_m = 0 \quad (9)$$

$$\text{với } \alpha_m = 1,56 \frac{1,32m^2 + 0,852m + 1}{(1 + 1,22m)^2} \quad (10)$$

Ở cuối khu xoáy $m = 0, \alpha = 1,56$, tại vị trí sau nước nhảy ổn định $\alpha_m = 1$.

Chia phương trình (9) cho số hạng $gb_1^2h_1^2$ nhận được công thức có dạng không thứ nguyên:

$$\left\{ \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 - \left(2 \frac{b}{b_1} F + G \right) \frac{h}{h_1} + 2\alpha_m F = 0 \right. \\ \left. \left(\frac{b}{b_1} \right)^2 F = F\eta; \frac{b}{b_1} G = 1 \right. \quad (11)$$

Nghiệm của (11) là:

$$\begin{cases} \frac{h}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \frac{b}{b_1} F + G \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right)} \\ \cos\phi = \frac{3\sqrt{3}\alpha_m F}{\left(2 \frac{b}{b_1} F + G\right)^{3/2}} \end{cases} \quad (12)$$

Khi $\alpha_m \approx 1$, công thức (12) kết quả chiều sâu liên hiệp sau nước nhảy trên kênh đáy bằng mở rộng dần.

$$\begin{cases} \frac{h}{h_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \frac{b}{b_1} F + G \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right)} \\ \cos\phi = \frac{3\sqrt{3}F}{\left(2 \frac{b}{b_1} F + G\right)^{3/2}} \end{cases} \quad (13)$$

2.4.2. Chiều dài khu xoáy và chiều dài nước nhảy

Sử dụng phương trình Reynolds mở rộng (6) với giả thiết $u \approx umf(z/h)$ và lòng dẫn mở rộng dần có góc mở 2α , $db/dx = 2tg\alpha$ và đặt:

$$\begin{cases} A = \left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right]^2; \\ B = \frac{d\left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right]}{dz} \int_0^h \left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right] dz = \frac{d\left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right]}{d\left(\frac{z}{h}\right)} \int_0^1 \left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right] d\eta \\ C = 4k^2 \frac{d\left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right]}{d\left(\frac{z}{h}\right)} \frac{d^2\left[f\left(\frac{z}{h}\right) \right]}{d\left(\frac{z}{h}\right)^2}; \quad k = \frac{x}{h} \end{cases} \quad (14)$$

nhận được phương trình:

$$\begin{aligned} b(A-B) \frac{du_m^2}{dx} + 4(A-B)u_m^2 tg\alpha - \\ - 2u_m^2 \frac{b}{h} \frac{dh}{dx} B = 2g \left(b \frac{dh}{dx} + 2htg\alpha \right) - C \frac{b}{h} u_m^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Đồng thời dựa vào công thức tích phân Karman (5), nhận được:

$$\begin{cases} u_m^2 = \frac{g}{0,632h} \left(\frac{2u_1^2 b_1 h_1}{gb} + \frac{h_1^2 b_1}{b} - h^2 \right) \\ = \frac{g}{0,632h} (a^2 - h^2) \\ a^2 = h_1^2 (2Fr_1 + 1) \frac{b_1}{b} \end{cases} \quad (16)$$

Giải hệ (15) và (16) nhận được phương trình xác định sự biến đổi của chiều sâu dọc theo chiều

dòng chảy:

$$\begin{aligned} & A_2 (\eta^2 - 1) - 0,9(\eta - 1) + C_2 \ln \left| \frac{E_2^2 - \eta^2}{E_2^2 - 1} \right| + \\ & + E_2 \ln \left| \frac{(E_2 + \eta)(E_2 - 1)}{(E_2 - \eta)(E_2 + 1)} \right| = 0,45 \frac{x}{h_1} \\ & A_2 = -\frac{8\xi tg\alpha}{\beta}; \quad C_2 = \frac{4,72E^2 \xi tg\alpha}{\beta}; \\ & E_2 = \sqrt{2\beta F + G} = \frac{a_1}{h_1}; \\ & \beta = \frac{b}{b_1}; \quad \xi = \frac{h_1}{b_1}; \quad \eta = \frac{h}{h_1} \end{aligned} \quad (17)$$

Phương trình (17) biểu diễn quy luật thay đổi hình dạng trung bình của mặt thoáng trong khu vực nước nhảy. Khi $h = h_2$ thì (17) là công thức tính chiều dài nước nhảy trong lòng dẫn mở rộng dần, hay $x = L_{mr}$.

$$\begin{aligned} & A_3 (\eta_2^2 - 1) - 0,9(\eta_2 - 1) + C_3 \ln \left| \frac{E^2 - \eta_2^2}{E^2 - 1} \right| + \\ & + E_3 \ln \left| \frac{(E_3 + \eta_2)(E_3 - 1)}{(E_3 - \eta_2)(E_3 + 1)} \right| = 0,45 \frac{L_{mr}}{h_1} \\ & A_3 = -\frac{8\xi tg\alpha}{\beta_2}; \quad C_3 = \frac{4,72E^2 \xi tg\alpha}{\beta_2}; \\ & E_3 = \sqrt{2\beta_2 F + G} = \frac{a_1}{h_1}; \\ & \beta_2 = \frac{b_2}{b_1}; \quad \xi = \frac{h_1}{b_1}; \quad \eta_2 = \frac{h_2}{h_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Giải 2 hệ phương trình [(12), (17)] và [(13), (18)] nhận được các đặc trưng hình học không thứ nguyên gồm chiều sâu và chiều dài tương đối sau

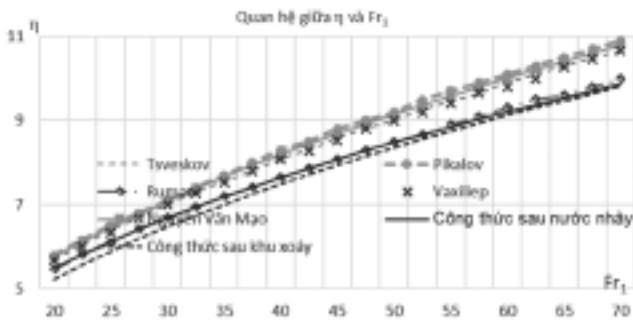
khu xoáy: $\eta_x = \frac{h_x}{h_1}, \frac{L_x}{h_1}$; chiều sâu và chiều dài tương đối sau nước nhảy $\eta_2 = \frac{h_2}{h_1}, \frac{L_{mr}}{h_1}$.

2.4.3. So sánh kết quả tính toán giữa các tác giả

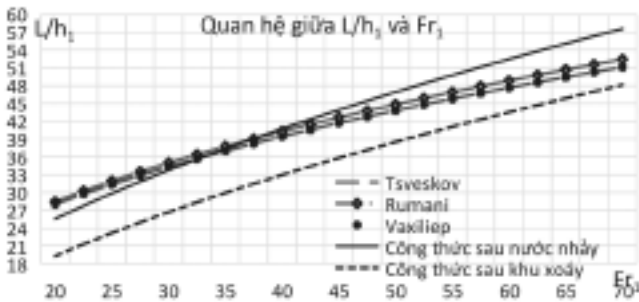
Nghiên cứu tiến hành so sánh với những công thức của các nhà khoa học khác trong điều kiện $tg\alpha = 0,06$; $\xi = 0,05$; $Fr_1 = 20 \div 70$. Kết quả thể hiện trên Hình 2 và 3.

Hình 2 và 3 cho thấy công thức đề xuất phù hợp với công thức của các tác giả khác.

3. KIỂM CHỨNG BẢNG SỐ LIỆU THÍ NGHIỆM



Hình 2. Mối quan hệ chiều sâu tương đối và số Fr1



Hình 3. Mối quan hệ chiều dài tương đối và số Fr1

3.1. Mô hình thí nghiệm

Để kiểm chứng độ tin cậy của công thức đề xuất [(12), (17)] và [(13), (18)], nghiên cứu tiến hành thí nghiệm trên mô hình vật lý được xây dựng dựa vào lý thuyết tương tự [14]. Mô hình được thực hiện tại Trường Đại học Thủy lợi (Hình 4). Mô hình vật lý thí nghiệm gồm:



Hình 4. Mô hình thí nghiệm

- Kính hữu cơ làm lòng dẫn, khe van, cửa phai. Lòng dẫn được thiết kế mở rộng dần, đỡ trên khung sắt, chiều rộng đầu máng là 0,277m; chiều rộng cuối máng là 0,491m; chiều dài máng là 2,44m.

- Máng lắng trụ nối tiếp phía hạ lưu được xây bằng gạch trát vữa xi măng, bề rộng 0,491m; chiều dài 1,5m; ở cuối có cửa van dạng phai có thể điều chỉnh độ mở.

- Kính hữu cơ có hệ số nhám: $n = 0,008 \div 0,009$, dày 10mm. Có thể quan sát bằng mắt thường vị trí nước nhảy, các khu xoáy cuộn, xoáy cục bộ và những điều kiện thủy lực khác.

Mục đích của việc thiết kế cửa van dạng phai ở thượng và hạ lưu mô hình nhằm điều chỉnh vị trí nước nhảy cho phù hợp. Bên cạnh đó kết hợp với điều chỉnh lưu lượng nước cấp để đạt được số Fr1 theo ý muốn. Nghiên cứu tiến hành thí nghiệm với số Froude ở mặt cắt đầu nước nhảy Fr1 thay đổi trong khoảng $20 \div 65$.

Sai số của mô hình và phép đo như sau:

- Sai số các điểm đo cao độ và chiều dài (m):

+ Sai số về địa hình và các cao độ khác tại các điểm không chế: $\pm 1,0\text{mm}$.

+ Sai số về kích thước các bộ phận chế tạo bằng kính hữu cơ: $\pm 0,5\text{mm}$.

+ Sai số đo cao độ theo máy thủy bình Sokkia: $1,0\text{mm}$.

+ Sai số về cao độ đường mặt nước, chiều cao sóng, chiều sâu dòng chảy và các đại lượng cao độ khác: $\pm 2,0\text{mm}$.

+ Các sai số về độ dài được đánh giá theo thang đo trên dụng cụ thước thép: $\pm 0,5\text{mm}$.

- Sai số đo lưu lượng:

+ Sai số kim đo mực nước đập tràn thành mỏng tại máng lượng sai số kim đo không vượt quá 0,5mm. Theo công thức đo lưu lượng, sai số tương đối của phép đo là:

$$\frac{\Delta Q}{Q}(\%) = \left(\left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{3\Delta h_e}{2h_e} \right| \right) = (0,00063 + 0,0106) \approx 1\% \quad (19)$$

trong đó: $b = 0,9\text{m}$; sai số chiều rộng $\Delta b = 1\text{mm}$; sai số mực nước $\Delta h = 0,5\text{mm}$; độ cao cột nước trên máng đo tối thiểu $h_{\min} = 100\text{mm}$.

Sai số đo vận tốc, với $v = Q/\omega$ thì sai số tương đối của lưu tốc là:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left| \frac{\Delta Q}{Q} \right| + \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| \quad (20)$$

trong đó: sai số đo diện tích:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega}(\%) = \left| \frac{\Delta h}{h} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = \left| \frac{0,5}{1000} \right| + \left| \frac{0,5}{1000} \right| \approx 0,1\% \quad (21)$$

rộng của tràn trên mô hình có sai số tuyệt đối 1,0mm khi chế tạo;

Sai số dụng cụ đo lưu tốc theo đặc tính kỹ thuật của máy là 1,0% (được phản ánh qua mạch động lưu tốc điểm và cường độ rối).

Như vậy sai số của tổng vận tốc là:

$$\frac{\Delta V}{V}(\%) = 1\% + 0,1\% + 1\% = 2,1\%$$

Kết luận: Mô hình và các thiết bị đo đạt tiêu chuẩn để thí nghiệm.

3.2. Kiểm định công thức

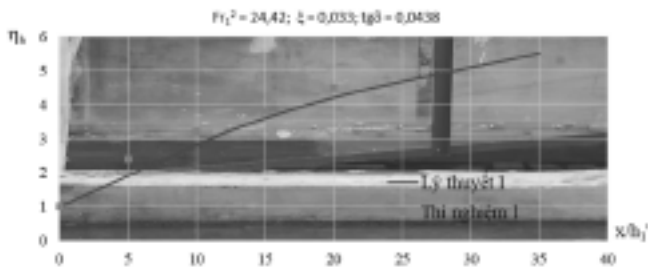
Đường mặt nước trung bình của dòng chảy trong phạm vi nước nhảy được tính toán theo công thức đề xuất và đối chứng bằng kết quả thí nghiệm trên mô hình vật lý (Hình 5 và 6).

Kết quả kiểm chứng cho thấy mối quan hệ giữa

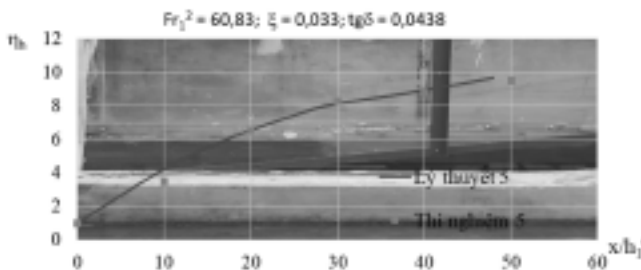
chiều sâu tương đối của dòng chảy $\eta_h = \frac{h'}{h_1} = \frac{h}{h_1}$

và chiều dài tương đối $\frac{x}{h_1}$ phù hợp về giá trị cũng

như xu thế biến đổi kết quả tính toán và thí nghiệm.



Hình 5. Quan hệ giữa η_h và x/h_1 với $Fr_1^2 = 24,42$, $\xi = 0,033$, $i = 0,00$



Hình 6. Quan hệ giữa η_h và x/h_1 với $Fr_1^2 = 60,83$, $\xi = 0,033$, $i = 0,00$

4. KẾT LUẬN:

Kết quả nghiên cứu cho thấy:

- Với các giả thiết khác nhau thì kết quả tính toán theo các công thức cho khác nhau. Công thức đề xuất được thiết lập cho kết quả chiều sâu tương đối của dòng chảy cuối nước nhảy phù hợp với công thức của các tác giả khác. Khi số Fr_1 càng lớn thì sai số giữa công thức đề xuất và các công thức kinh nghiệm càng tăng do độ hàm khí trong nước nhảy và trong dòng chảy tầng, trong khi công thức đề xuất đã bỏ qua ảnh hưởng này theo giả thiết ban đầu.

- Việc tiến hành thí nghiệm trên mô hình vật lý

nhằm kiểm chứng công thức đề xuất là phương pháp được sử dụng rộng rãi. Phương pháp này yêu cầu số liệu thí nghiệm được đo đạc phải rất tỉ mỉ bên cạnh việc giải các phương trình và hệ phương trình đề xuất. Kết quả thu được trên các đồ thị hình 5 và 6 cho thấy công thức đề xuất hoàn toàn phù hợp với số liệu thí nghiệm trong phạm vi sai số cho phép. □

Tài liệu tham khảo:

- [1] Belanger, J. B. C. J. "Essai sur la solution numerique de quelques problemes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes" (Test on the numerical solution of some problems relating to the permanent movement of running waters), Kessinger Publishing, Whitefish, MT, USA, 1828. (in French)
- [2] B. A. Bakhmeteff (1932), "Hydraulics of Open Channels", McGraw-Hill Book Co., New York.
- [3] Ph. I Picalov et al (1964), Thủy lực, Nhà xuất bản Năng lượng, Matxcova.
- [4] Rajaratnam, N. "The Hydraulic Jump as a Wall Jet", Journal of the Hydraulics Division, 91(5), pp. 107-132, 1965.
- [5] Rajaratnam, N. "Hydraulic jumps on rough beds", Transactions of the Engineering Institute of Canada, 11(A-2), pp. 1-8, 1968
- [6] M. A. Михалев (1971), "Гидравлический расчёт потоков с вихреобразованием", энергия, Ленинград.
- [7] Dumitru Dumitrescu và Ernest Răzvan, "Disiparea energiei 5i disipatori de energie", Editura tehnică București.
- [8] Hoàng Tư An, Thủy lực công trình, Hà Nội: Nhà xuất bản Nông nghiệp, 2012.
- [9] Nguyễn Văn Mạo, "Tính bề tiêu năng ở lòng dẫn phi lăng trụ," Tạp chí Khoa học Kỹ thuật, no. 2, pp. 3-5, 1977.
- [10] Gharangik, A. M., Chaudhry, M. H. "Numerical Simulation of Hydraulic Jump", Journal of Hydraulic Engineering, 117(9), pp. 1195-1211, 1991
- [11] Pagliara, S., Palermo, M. "Hydraulic jumps on rough and smooth beds: aggregate approach for horizontal and adverse-sloped beds", Journal of Hydraulic Research, 53(2), 243-252, 2015. Omid, M. H., Nasrabadi, M., Farhoudi, J. "Suspended sediment effects on hydraulic jump characteristics", Water Management, 164(2), pp. 91-101, 2011.
- [12] Hassanpour, N., Hosseinzadeh Dalir, A., Farsadizadeh, D., Gualtieri, C. "An Experimental Study of Hydraulic Jump in a Gradually Expanding Rectangular Stilling Basin with Roughened Bed", Water, 9(12), pp. 945-968, 2017.
- [13] Saman Nikmehr, Younes Aminpour. "Numerical Simulation of Hydraulic Jump over Rough Beds" Cite this article as: Nikmehr, S., Aminpour, Y. "Numerical Simulation of Hydraulic Jump over Rough Beds", Periodica Polytechnica Civil Engineering, 2020.
- [14] Nguyễn Văn Tài, "Mô hình vật lý và kỹ thuật đo đạc," Trường Đại học Thủy lợi.