

# PHƯƠNG PHÁP PINN VỚI KIẾN TRÚC PHÂN NHÁNH CHO BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH NGUỒN TRONG PHƯƠNG TRÌNH POISSON

## PINN METHOD WITH BRANCH STRUCTURE FOR THE SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM IN POISSON'S EQUATIONS

Phạm Quý Mươi\*, Nguyễn Thị Thanh Châu, Lê Quốc Huy, Hồ Duy Hoàng, Nguyễn Đức Thành Danh

Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Việt Nam<sup>1</sup>

\*Tác giả liên hệ / Corresponding author: pqmuoi@ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 20/12/2025; Sửa bài / Revised: 03/3/2026; Chấp nhận đăng / Accepted: 14/4/2026)

DOI: 10.31130/ud-jst.2026.24(5A).723

**Tóm tắt** - Trong bài báo này, nhóm tác giả đề xuất một phương pháp cải tiến sử dụng Mạng Nơ-ron thông tin Vật lý kết hợp với kiến trúc mạng phân nhánh để giải bài toán xác định nguồn cho phương trình Poisson. Trước hết, đề xuất một kiến trúc mạng với các lớp ẩn dùng chung và các nhánh đầu ra riêng biệt cho nghiệm và nguồn. Sử dụng kiến trúc mạng này, đề xuất một giải thuật mới bao gồm bốn giai đoạn: Giai đoạn 1 và 2 là quy trình tiền xử lý để nhận được các ước lượng ban đầu cho trọng số của mạng nơ-ron. Giai đoạn 3 bao gồm việc đề xuất hàm giá sử dụng phương pháp bình phương bé nhất cùng với chỉnh hóa Tikhonov và việc sử dụng thuật toán tối ưu L-BFGS-B để cải thiện tốc độ hội tụ và độ chính xác. Giai đoạn 4 là quá trình làm mịn bởi giải thuật Adam với kích thước bước nhỏ. Các kết quả số minh họa hiệu quả của phương pháp mới đề xuất và chứng minh tính ổn định của phương pháp với các tập dữ liệu nhiễu khác nhau.

**Từ khóa** - Mạng Nơ-ron sâu thông tin vật lý; Mạng Nơ-ron sâu với kiến trúc phân nhánh; bài toán xác định nguồn; phương trình Poisson

### 1. Đặt vấn đề

Phương trình Poisson,  $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  với  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , là một trong những phương trình đạo hàm riêng cơ bản, quan trọng trong vật lý toán học, xuất hiện trong các bài toán về tĩnh điện, truyền nhiệt, cơ học chất lưu và lý thuyết đàn hồi [1]. Trong khi bài toán thuận (tìm  $u$  từ  $f$ ) đã được nghiên cứu kỹ lưỡng, bài toán ngược xác định nguồn  $f$  từ các quan sát của  $u$  là một thách thức lớn do tính không đặt chỉnh theo nghĩa Hadamard [2].

Trong những năm gần đây, Mạng nơ-ron thông tin Vật lý (PINNs) đã nổi lên như một phương pháp mạnh mẽ để giải cả bài toán thuận và ngược của các phương trình đạo hàm riêng [3, 4]. Tuy nhiên, các phương pháp PINN truyền thống cho bài toán ngược thường gặp khó khăn trong việc khôi phục chính xác cả  $u(x)$  và  $f(x)$  và tính ổn định khi dữ liệu bị nhiễu và không hoạt động hiệu quả cho bài toán xác định nguồn đang xét, ngay cả trong trường hợp một chiều. Để khắc phục những thách thức này, nhóm tác giả đề xuất một phương pháp PINN cải tiến kết hợp nhiều ý tưởng lại với nhau. Phương pháp đề xuất bao gồm:

Xây dựng một kiến trúc mạng phân nhánh với việc sử dụng các lớp ẩn chia sẻ để trích xuất đặc trưng chung, sau

**Abstract** - In this paper, the authors propose an improved method using a Physical Information Neural Network combined with a branching network architecture to solve the problem of determining the source for Poisson equations. First, the authors propose a network architecture with shared hidden layers and separate output branches for solutions and sources. Using this network architecture, the authors propose a new algorithm consisting of four stages: Stages 1 and 2 are preprocessing procedures to obtain initial estimates for the neural network weights. Stage 3 includes proposing a cost function using the least squares method, along with Tikhonov alignment, and using the L-BFGS-B optimization algorithm to improve convergence speed and accuracy. Stage 4 is the smoothing process by the Adam algorithm with a small step size. Numerical results illustrate the efficiency of the proposed new method and demonstrate its stability with different noisy datasets.

**Key words** - Physics Informed Neural Networks; Neural Networks with branch structure; source identification problem; Poisson equation

đó tách thành hai nhánh riêng biệt cho  $u$  và  $f$ . Điều này cho phép mô hình học các đặc trưng chung cũng như các đặc trưng riêng biệt cho hai hàm.

Đề xuất áp dụng quy trình tiền xử lý để nhận được một ước lượng xấp xỉ ban đầu cho các tham số của mạng nơ-ron. Đầu tiên là bộ tham số của mạng nơ-ron của  $u$  từ dữ liệu. Sau đó, nhận được bộ tham số cho mạng nơ-ron của  $f$  dựa trên bộ tham số mạng nơ-ron của  $u$  mới ước lượng.

Áp dụng thuật toán L-BFGS-B thay vì Adam truyền thống để đạt được hội tụ nhanh hơn và chính xác hơn cho bài toán ngược cùng với việc chỉnh hóa Tikhonov để giải bài toán xác định nguồn ổn định. Sự kết hợp đồng thời các ý tưởng trên giúp phương pháp đề xuất không chỉ khắc phục được tính đặt không chỉnh của bài toán xác định nguồn mà còn cho kết quả tốt hơn so với phương pháp PINN truyền thống trong [3, 4].

### 2. Cơ sở lý thuyết và phát biểu bài toán

#### 2.1. Bài toán thuận và ngược

Xét phương trình Poisson trong miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ :

**Bài toán 1 (Bài toán thuận).** Cho hàm nguồn  $f \in L^2(\Omega)$  và điều kiện biên Dirichlet  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ,

<sup>1</sup> The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam (Pham Quy Muoi, Nguyen Thi Thanh Chau, Le Quoc Huy, Ho Duy Hoang, Nguyen Duc Thanh Danh)

tìm  $u \in H^1(\Omega)$  sao cho:

$$-\Delta u = f \text{ trong } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g \text{ trên } \partial\Omega. \quad (2)$$

Bài toán thuận là đặt chính theo nghĩa Hadamard: nghiệm tồn tại, duy nhất và phụ thuộc liên tục vào dữ liệu [1].

**Bài toán 2 (Bài toán xác định nguồn).** Cho dữ liệu quan sát nhiều  $u^\delta(\mathbf{x})$  tại các điểm  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_u} \subset \Omega$  thỏa mãn  $\|u - u^\delta\|_{L^2} \leq \delta$ , và điều kiện biên  $g$ , tìm đồng thời  $u$  và  $f$  sao cho:

$$-\Delta u = f \text{ trong } \Omega, \quad (3)$$

$$u = g \text{ trên } \partial\Omega. \quad (4)$$

Bài toán ngược này là không đặt chính, đòi hỏi các kỹ thuật chính hóa để ổn định hóa nghiệm.

## 2.2. Kiến trúc mạng nơ-ron phân nhánh

Để tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán xác định nguồn, nhóm tác giả đề xuất kiến trúc mạng phân nhánh được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} \text{Nhánh chung:} \quad & h^{(0)} = \mathbf{x}, \\ & h^{(l)} = \sigma(W_h^{(l)} h^{(l-1)} + b_h^{(l)}), \\ & l = 1, \dots, L_s \\ \text{Nhánh cho } u: \quad & u(\mathbf{x}) = W_u h^{(L_s)} + b_u. \\ \text{Nhánh cho } f: \quad & z^{(0)} = h^{(L_s)}, \\ & z^{(l)} = \sigma(W_f^{(l)} z^{(l-1)} + b_f^{(l)}), \\ & l = 1, \dots, L_f \\ & f(\mathbf{x}) = W_f^{\text{out}} z^{(L_f)} + b_f^{\text{out}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ở đây,  $\sigma$  là hàm kích hoạt *tanh*,  $L_s$  là số lớp ẩn dùng chung, và  $L_f$  là số lớp ẩn trong nhánh  $f$ .

Gọi  $\theta$  là vectơ chứa tất cả các tham số của mạng nơ-ron và  $\mathcal{N} = \{u_\theta, f_\theta\}$  là tập tất cả các hàm sinh bởi mạng nơ-ron. Khi đó, nghiệm xấp xỉ cho bài toán ngược được tìm trong không gian  $\mathcal{N}$ .

## 2.3. Phương pháp PINN cải tiến

Để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán xác định nguồn, chúng ta sử dụng phương pháp bình phương bé nhất cùng với chính hóa Tikhonov. Điều này dẫn đến bài toán tối ưu tự do với hàm giá cho bởi:

$$\mathcal{L}(\theta) = \lambda_{\text{data}} \mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda_{\text{PDE}} \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \lambda_{\text{BC}} \mathcal{L}_{\text{BC}} + \lambda_{\text{reg}} \mathcal{L}_{\text{reg}}, \quad (6)$$

trong đó

$$\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u_\theta(\mathbf{x}_i) - u^\delta(\mathbf{x}_i)|^2, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} |-\Delta u_\theta(\mathbf{x}_j^c) - f_\theta(\mathbf{x}_j^c)|^2, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{\text{BC}} = \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} |u_\theta(\mathbf{x}_k^b) - g(\mathbf{x}_k^b)|^2, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{reg}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} |f_\theta(\mathbf{x}_j^c)|^2. \quad (10)$$

Ở đây  $\{\mathbf{x}_i\}$  là tập các điểm lấy dữ liệu đo,  $\{\mathbf{x}_i^c\}$  là tập các điểm trong miền  $\Omega$  và  $\{\mathbf{x}_i^b\}$  là tập các điểm trên biên của  $\Omega$ .  $\lambda_{\text{data}}$ ,  $\lambda_{\text{PDE}}$  và  $\lambda_{\text{BC}}$  là các trọng số.  $\lambda_{\text{reg}}$  là tham số chính hóa. Trong [3, 4], các tham số  $\lambda_{\text{data}}$ ,  $\lambda_{\text{PDE}}$  và  $\lambda_{\text{BC}}$  thường được chọn bằng 1 và không có thành phần chính hóa Tikhonov. Với cách chọn này, ta có phương pháp PINN truyền thống. Cách tiếp cận này không hoạt động tốt cho bài toán xác định nguồn trong bài báo này. Các ví dụ số ở phần sau sẽ chỉ ra điều này. Nhóm tác giả đề xuất chọn trọng số lớp cho  $\lambda_{\text{BC}} = 20$ , trọng số vừa phải cho  $\lambda_{\text{PDE}}$  và trọng số bình thường cho  $\lambda_{\text{data}} = 1$ . Việc lựa chọn các tham số này dựa trên phương pháp “thử-sai”, một phương pháp lựa chọn tối ưu cho các tham số này vẫn còn là vấn đề mở.

Để tìm cực tiểu cho hàm  $\mathcal{L}$ , cần khởi tạo một giá trị ban đầu  $\theta^0$ , sau đó sử dụng giải thuật L-BFGS-B. Vì giải thuật L-BFGS-B có tốc độ hội tụ nhanh nhưng cần một điểm khởi đầu  $\theta^0$  đủ gần và khi tiến gần về giá trị cực trị của hàm  $\mathcal{L}$  thường xảy ra hiện tượng "over shoot". Để khắc phục những hạn chế này và dựa trên thông tin về dữ liệu cũng như kiến trúc mạng nơ-ron. Nhóm tác giả đề xuất một quy trình huấn luyện gồm bốn giai đoạn: Giai đoạn 1, sử dụng dữ liệu  $u^\delta$  của  $u$  chúng ta huấn luyện nhánh mạng nơ-ron của  $u$  (bao gồm các tham số ở các lớp ẩn dùng chung và lớp đầu ra cho  $u$  dựa trên hàm giá  $\mathcal{L}_{\text{data}}$  và giải thuật Adam. Sau giai đoạn này, chúng ta nhận được bộ tham số tiền xử lý cho nhánh mạng này, tức là nhận được một hàm  $u_{\text{pre-trained}}$ . Giai đoạn 2, khởi tạo  $f_{\text{init}}$  từ nhánh mạng nơ-ron đã được huấn luyện ở Giai đoạn 1, tức là  $f_{\text{init}} = -\Delta u_{\text{pre-trained}}$ . Sử dụng dữ liệu này để huấn luyện cho nhánh mạng nơ-ron ứng với nhánh  $f$ , sử dụng giải thuật Adam. Sau khi hoàn thành hai giai đoạn này, nhận được bộ tham số khởi đầu  $\theta^0$  tốt hơn nhiều so với bộ tham số ban đầu của mạng nơ-ron (được đặt bằng không hoặc sinh ngẫu nhiên). Giai đoạn 3, áp dụng giải thuật L-BFGS-B để tìm cực tiểu của hàm  $\mathcal{L}(\theta)$  với điểm khởi đầu là  $\theta^0$ . Sau khi giải thuật kết thúc, chuyển qua Giai đoạn 4. Đây là giai đoạn tinh chỉnh, sử dụng giải thuật Adam với kích thước bước nhỏ để nhận được các giá trị xấp xỉ gần với điểm cực tiểu của hàm  $\mathcal{L}$ .

Quy trình 4 giai đoạn này được trình bày ở Giải thuật 1 sau đây:

### Giải thuật 1

**Giai đoạn 1:** Huấn luyện chỉ nhánh  $u$  trên  $\mathcal{L}_{\text{data}}$ , dùng giải thuật Adam với 200 vòng lặp.

**Giai đoạn 2:** Tính  $f_{\text{init}} = -\Delta u_{\text{pre-trained}}$  và huấn luyện nhánh  $f$  để khớp  $f_{\text{init}}$ , dùng giải thuật Adam với 100 vòng lặp.

**Giai đoạn 3:** Huấn luyện mạng nơ-ron từ hàm giá  $\mathcal{L}$ , sử dụng giải thuật L-BFGS-B.

**Giai đoạn 4:** Huấn luyện mạng nơ-ron từ hàm giá  $\mathcal{L}$ , sử dụng giải thuật Adam với kích thước bước nhỏ trong 200 vòng lặp.

Như vậy, phương pháp mới mà nhóm tác giả đề xuất có ưu điểm vượt trội khai thác được ưu điểm của kiến trúc mạng, tốc độ hội tụ nhanh của L-BFGS-B, tính hội tụ toàn cục, ổn định (nhưng chậm của giải thuật Adam) và ổn định với nhiễu (do sử dụng chính hóa Tikhonov). Các ví dụ số ở phần tiếp theo sẽ minh họa những ưu điểm này của phương pháp mới đề xuất.

### 3. Một số ví dụ áp dụng

Trong phần này, nhóm tác giả áp dụng phương pháp mới đề xuất để giải bài toán xác định nguồn cho phương trình Poisson một chiều và hai chiều. Trước hết, xét ví dụ một chiều sau đây:

**Ví dụ 1** Xét phương trình Poisson 1D:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

với điều kiện biên Dirichlet:

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Từ dữ liệu đo nhiễu của  $u(x)$ , chúng ta khôi phục đồng thời  $u(x)$  và  $f(x)$ .

Để áp dụng giải thuật mới đề xuất và minh họa các kết quả đạt được chọn nghiệm và nguồn chính xác như sau:

$$u(x) = \sin(\pi x), \quad f(x) = \pi^2 \sin(\pi x).$$

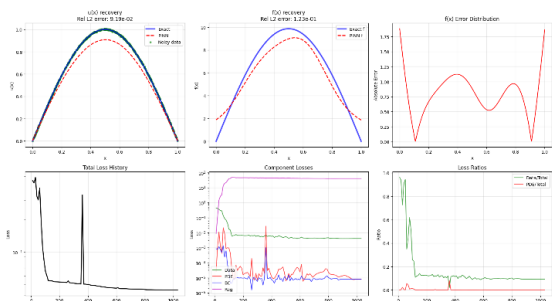
Nhóm tác giả sinh 800 điểm dữ liệu ngẫu nhiên trong  $[0, 1]$ , 1000 điểm ngẫu nhiên cho hàm  $\mathcal{L}_{PDE}$  và 2 điểm biên  $\{0, 1\}$ . Sử dụng nhiễu Gaussian để tạo dữ liệu nhiễu từ nghiệm chính xác với mức nhiễu  $\delta = 0,01$  (1%) và  $\delta = 0,05$  (5%):

$$u_{noisy} = u + \sigma \cdot \mathcal{N}(0, 1).$$

Kiến trúc mạng nơ-ron được xác định như sau: sử dụng 3 lớp ẩn chung (mỗi lớp có 64 nơ-ron) từ input  $x \in \mathbb{R}^1$ . Nhánh đầu ra  $u$  gồm một nơ-ron trực tiếp từ đặc trưng chung và nhánh  $f$  gồm 2 lớp ẩn (mỗi lớp 32 nơ-ron) và lớp đầu ra  $f$  gồm một nơ-ron.

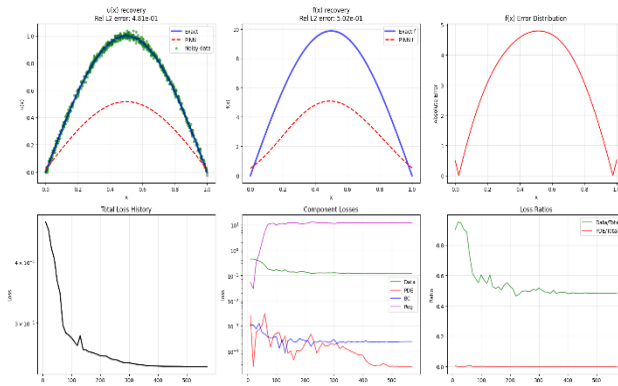
Áp dụng phương pháp mới đề xuất, Giải thuật 1, cho 2 trường hợp nhiễu, nhận được kết quả như sau:

Với mức nhiễu 1%, sai số tương đối  $L^2$  của  $u$  gần bằng 0,919, sai số tương đối  $L^2$  của  $f$  gần bằng 0,123. Với mức nhiễu 5% sai số tương đối của  $u$  tăng nhẹ lên 0,481 và sai số tương đối của  $f$  xấp xỉ 0,502.



**Hình 1.** Các kết quả nhận được từ Giải thuật 1 ứng với mức nhiễu 1% của dữ liệu trong Ví dụ 1

Hình 1 minh họa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ của bài toán cũng như giá trị của hàm giá và các thành phần trong hàm giá. Chúng ta thấy rằng, phương pháp cải tiến khôi phục tốt cả nghiệm của phương trình Poisson và hàm nguồn. Giá trị hàm giá giảm nhanh theo vòng lặp, đặc biệt là sau 200 vòng lặp đầu tiên.



**Hình 2.** Các kết quả nhận được từ Giải thuật 1 ứng với mức nhiễu 5% của dữ liệu trong Ví dụ 1

Hình 2 minh họa kết quả nhận được ứng với mức sai số dữ liệu 5%. Trong trường hợp này, giải thuật cũng khôi phục được cả nghiệm và hàm nguồn nhưng với chất lượng kém hơn. Điều này là hiển nhiên vì sai số dữ liệu tăng thì chất lượng khôi phục sẽ giảm đi. Tuy nhiên, có thể thấy rằng sai số dữ liệu tăng lên 5 lần nhưng sai số của nghiệm và hàm nguồn tăng lên chưa đến 5 lần. Điều này cho thấy tính ổn định của phương pháp mới đề xuất.

Cuối cùng, muốn nhấn mạnh rằng, các phương pháp PINN truyền thống không hoạt động cho bài toán được xét ở đây. Nhóm tác giả đã chạy thử nhiều lần và kết quả là không thể khôi phục được hàm nguồn mà chỉ khôi phục được nghiệm chính xác của phương trình Poisson. Điều này cho thấy, phương pháp mới đề xuất vượt trội hơn so với các phương pháp PINN truyền thống.

Tiếp theo, xét ví dụ hai chiều sau đây:

**Ví dụ 2** Xét phương trình Poisson hai chiều

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ trong } \Omega := (0, 1) \times (0, 1),$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Từ các dữ liệu đo nhiễu của nghiệm  $u(x, y)$  trong miền  $\Omega$ , nhóm tác giả khôi phục đồng thời nghiệm  $u(x, y)$  và hàm nguồn  $f(x, y)$ .

Để áp dụng giải thuật mới đề xuất và minh họa các kết quả đạt được, nhóm tác giả chọn nghiệm và hàm nguồn chính xác như sau:

$$u(x, y) = (1 - x^2 - y^2) \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

Khi đó, hàm nguồn tương ứng được cho bởi

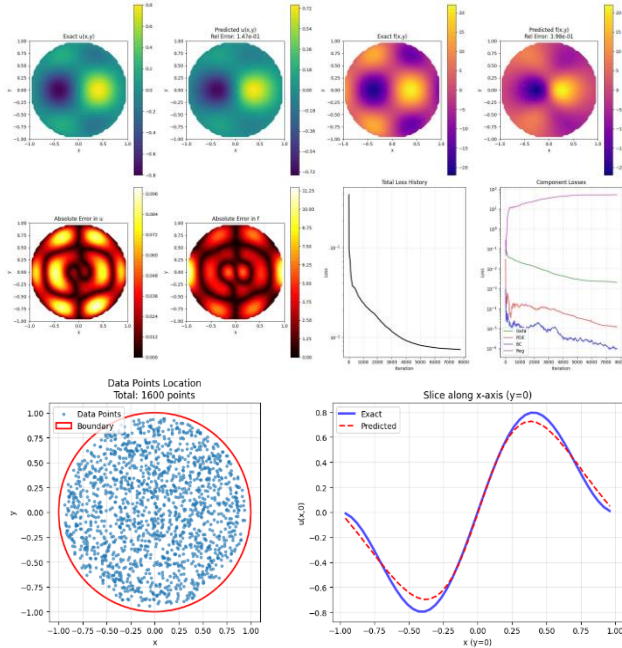
$$f(x, y) = [4 + 2\pi^2(1 - x^2 - y^2)] \sin(\pi x) \cos(\pi y) + 4\pi x \cos(\pi x) \cos(\pi y) - 4\pi y \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Nhóm tác giả sinh 1600 điểm dữ liệu ngẫu nhiên trong miền  $\Omega$ , sinh 2000 điểm ngẫu nhiên cho hàm  $\mathcal{L}_{PDE}$  và 200 điểm ngẫu nhiên trên biên  $\partial\Omega$ . Dữ liệu

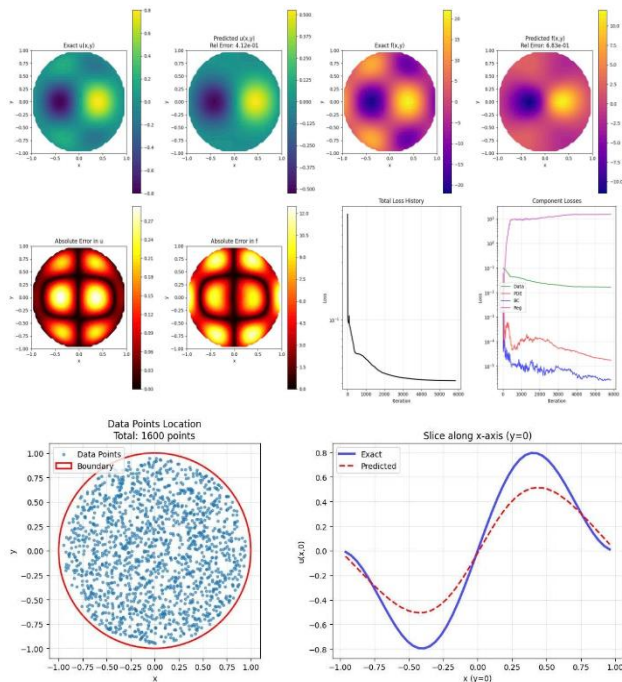
những được tạo bằng cách cộng nhiễu Gaussian vào nghiệm chính xác:

$$u_{\text{noisy}}(x, y) = u(x, y) + \sigma \mathcal{N}(0, 1),$$

trong đó  $\sigma = \delta \cdot \text{std}(u)$  với hai mức nhiễu được xét là  $\delta = 0,01$  (1%) và  $\delta = 0,05$  (5%).



**Hình 3.** Các kết quả nhận được từ Giải thuật 1 ứng với mức nhiễu 1% của dữ liệu trong Ví dụ 2



**Hình 4.** Các kết quả nhận được từ Giải thuật 1 ứng với mức nhiễu 5% của dữ liệu trong Ví dụ 2

Kiến trúc mạng nơ-ron được xác định bởi: đầu vào là  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , phân tích xuất đặc trưng chung gồm 4 lớp

ẩn, mỗi lớp có 80 nơ-ron với hàm kích hoạt tanh. Nhánh đầu ra  $u$  gồm một lớp tuyến tính, trong khi nhánh đầu ra  $f$  gồm 3 lớp ẩn (mỗi lớp 40 nơ-ron) và một lớp tuyến tính đầu ra.

Thuật toán huấn luyện được thực hiện theo Giải thuật 1. Với mức nhiễu 1%, sai số tương đối chuẩn  $L^2$  của nghiệm  $u$  xấp xỉ 0,147, trong khi sai số tương đối chuẩn  $L^2$  của hàm nguồn  $f$  vào khoảng 0,398. Khi mức nhiễu tăng lên 5%, sai số tương đối của nghiệm  $u$  tăng lên khoảng 0,412 và sai số tương đối của hàm nguồn  $f$  xấp xỉ 0,683.

Trong cả hai trường hợp, phương pháp mới đề xuất đều khôi phục được đồng thời nghiệm  $u(x, y)$  và hàm nguồn  $f(x, y)$ . Mặc dù, chất lượng khôi phục giảm khi mức nhiễu tăng, sai số của nghiệm và hàm nguồn tăng chậm hơn so với mức tăng của nhiễu dữ liệu, cho thấy tính ổn định của phương pháp. Ngược lại, các phương pháp PINN truyền thống trong các thử nghiệm của nhóm tác giả chỉ khôi phục được nghiệm  $u$  mà không thể tái tạo chính xác hàm nguồn  $f$ , qua đó cho thấy ưu thế rõ rệt của phương pháp mới đề xuất.

#### 4. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã đề xuất một phương pháp PINN cải tiến cho bài toán xác định nguồn trong phương trình Poisson. Phương pháp kết hợp kiến trúc mạng phân nhánh, quy trình tiền xử lý để tìm giá trị khởi đầu cho giải thuật L-BFGS-B và quá trình làm mịn ở bước cuối. Phương pháp mới đề xuất có khả năng khôi phục đồng thời cả nghiệm  $u$  và nguồn  $f$  với độ chính xác cao, ổn định và tốc độ hội tụ nhanh. Các kết quả số cho thấy phương pháp hiệu quả và ổn định với dữ liệu nhiễu. Phương pháp mới không chỉ áp dụng cho bài toán xác định nguồn trong phương trình Poisson mà còn có thể áp dụng cho bài toán xác định nguồn trong phương trình Elliptic cũng như cho phương trình đạo hàm riêng tuyến tính và phi tuyến. Đây là một trong những hướng nghiên cứu tiếp theo của nhóm tác giả.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] L. C. Evans, *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society, 2010.
- [2] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*. Winston & Sons, 1977.
- [3] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations", *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686-707, 2019.
- [4] G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, and L. Yang, "Physics-informed machine learning", *Nature Reviews Physics*, vol. 3, no. 6, pp. 422-440, 2021.
- [5] A. Bonfanti, G. Bruno, and C. Cipriani, "The challenges of the nonlinear regime for physics-informed neural networks", *Advances in neural information processing systems*, vol. 37, pp. 41852-41881, 2024.